

Comportement local moyen de la fonction de Brjuno

Michel Balazard et Bruno Martin

3 février 2010

ABSTRACT

We describe the average behaviour of the Brjuno function Φ in the neighbourhood of any given point of the unit interval. In particular, we show that the Lebesgue set of Φ is the set of Brjuno numbers and we find the asymptotic behaviour of the modulus of continuity of the integral of Φ .

KEYWORDS

Brjuno function, Brjuno numbers, Lebesgue set, Continued fractions.

MSC classification : 26A27 (11A55)

1 Introduction

Désignons par $[u]$ la partie entière du nombre réel u , et par $\{u\}$ sa partie fractionnaire :

$$\{u\} = u - [u], \quad [u] \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq \{u\} < 1.$$

Posons $X =]0, 1[\setminus \mathbb{Q}$. L'application

$$\begin{aligned} \alpha : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto \{1/x\} \end{aligned}$$

définit une transformation mesurable de X muni de la tribu borélienne dans lui-même. Le théorème de Gauss-Kuzmin (cf. [4]) affirme que la mesure

$$\mu = \frac{dx}{1+x}$$

est invariante par α : la mesure image $\alpha\mu$ n'est autre que μ . En d'autres termes, si $f \in L^1(0, 1)$, alors $f \circ \alpha$ appartient aussi à $L^1(0, 1)$ et

$$\int_0^1 f(\alpha(x)) \frac{dx}{1+x} = \int_0^1 f(x) \frac{dx}{1+x}.$$

Nous définissons les fonctions itérées de α en posant $\alpha_0(x) = x$ et pour $k \geq 1$, $\alpha_k(x) = \alpha(\alpha_{k-1}(x))$. Les fonctions α_k ($k \geq 0$) sont définies sur X , à valeurs dans X , et laissent la mesure μ invariante.

Posons

$$\Phi(x) = \sum_{k \geq 0} \alpha_0(x) \alpha_1(x) \cdots \alpha_{k-1}(x) \log(1/\alpha_k(x)). \quad (1)$$

Cette série à termes positifs définit une fonction $\Phi : X \rightarrow]0, +\infty]$, appelée fonction de Brjuno*. On constate aisément que Φ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\Phi(x) = \log(1/x) + x\Phi(\alpha(x)) \quad (x \in X). \quad (2)$$

Les nombres irrationnels x pour lesquels $\Phi(x) = \infty$, appelés nombres de Cremer, constituent un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. On appelle nombres de Brjuno les nombres x pour lesquels la série converge.

La fonction de Brjuno intervient dans l'étude des systèmes dynamiques engendrés par les itérations d'une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. Citons en particulier un théorème de Yoccoz [8] : si $f'(0) = e^{2i\pi x}$ où $x \in X$, alors f est localement linéarisable au voisinage de $z = 0$ si, et seulement si x est un nombre de Brjuno.

Marmi, Moussa et Yoccoz [5] ont entrepris l'étude de la régularité de la fonction de Brjuno et de certaines de ses variantes. Ils établissent notamment que Φ appartient à $L^p(0, 1)$ pour tout $p \geq 1$ et, ce qui est une propriété plus forte, qu'elle est à oscillation moyenne bornée :

$$\sup \frac{1}{|I|} \int_I \left| \Phi(x) - \frac{1}{|I|} \int_I \Phi(t) dt \right| dx < \infty, \quad (3)$$

où le supremum est pris sur tous les intervalles ouverts I inclus dans $]0, 1[$, et où $|I|$ désigne la longueur de I .

Dans ce travail, nous caractérisons les points de Lebesgue de Φ : étant donnée une fonction f localement intégrable sur \mathbb{R} , on dit que x est un point de Lebesgue de f si

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt = o(1) \quad (h \rightarrow 0).$$

Un théorème classique de la théorie de l'intégrale de Lebesgue stipule que presque tout nombre réel est un point de Lebesgue de f . Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 1 *Les points de Lebesgue de la fonction Φ sont exactement les nombres de Brjuno.*

Notre deuxième résultat est une description complète du comportement local de la fonction croissante et absolument continue Ψ définie par

$$\Psi(x) = \int_0^x \Phi(t) dt \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (4)$$

Théorème 2 *Soit $x_0 \in [0, 1]$. On a*

- (i) $\Psi(x_0 + h) - \Psi(x_0) = o(h \log 1/|h|)$ ($h \rightarrow 0, x_0 \in X$)
- (ii) $\frac{\Psi(x_0 + h) - \Psi(x_0)}{h} \rightarrow \Phi(x_0)$ ($h \rightarrow 0, x_0 \in X$)
- (iii) $\Psi(x_0 + h) - \Psi(x_0) = \frac{h}{q} \log 1/|h| + O(h \log 2q)$ ($0 \leq x_0, x_0 + h \leq 1, x_0 = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*, (p, q) = 1$).

*. Il s'agit ici d'une variante de la fonction définie par Yoccoz dans [8], pp. 11-16 : nous utilisons la théorie habituelle des fractions continues, alors que Yoccoz en considère une version légèrement modifiée.

Soit

$$\omega(h) = \sup\{|\Psi(x) - \Psi(y)|, 0 \leq x, y \leq 1, |x - y| \leq h\}$$

le module de continuité de la fonction Ψ . Notre troisième résultat est un équivalent asymptotique pour $\omega(h)$ quand h tend vers 0.

Théorème 3 *On a*

$$\omega(h) \sim h \log 1/h \quad (h \rightarrow 0, h > 0).$$

Nous emploierons désormais les notations

$$\beta_k(x) = \alpha_0(x)\alpha_1(x) \cdots \alpha_k(x) \tag{5}$$

(par convention, $\beta_{-1} = 1$) et

$$\gamma_k(x) = \beta_{k-1}(x) \log(1/\alpha_k(x)) \quad (x \in X, k \geq 0), \tag{6}$$

de sorte que $\gamma_0(x) = \log 1/x$ et que

$$\Phi(x) = \sum_{k \geq 0} \gamma_k(x) \tag{7}$$

$$= \sum_{k < K} \gamma_k(x) + \beta_{K-1}(x)\Phi(\alpha_K(x)) \quad (x \in X, K \in \mathbb{N}). \tag{8}$$

L'identité (8) est une forme généralisée de l'équation fonctionnelle (2).

Le §2 contient quelques remarques générales sur le comportement local moyen des fonctions localement intégrables. Au §3, nous rappelons les éléments de la théorie des fractions continues qui nous seront utiles. Nous obtenons au §4 une première majoration du module de continuité $\omega(h)$, essentiellement grâce au théorème de Gauss-Kuzmin. Pour la suite, notre approche est fondée sur un découpage diophantien de X qui fait intervenir la notion de cellule, déjà sous-jacente dans [5]. Nous définissons cette notion et l'étudions en détail au §5, en introduisant notamment les notions de profondeur et d'épaisseur d'un sous-intervalle de $]0, 1[$. Au §6 nous démontrons le point (iii) du théorème 2. Nous évaluons ensuite l'intégrale des fonctions γ_k sur un intervalle au §7. Après avoir traité le cas des points de Cremer au §8 nous démontrons le théorème 1 au §9 et le théorème 3 au §10. Au §11 final, nous formulons une question ouverte.

Toutes les constantes implicites dans les symboles O sont absolues; cela étant, la plupart de nos majorations sont numériquement explicites. Enfin, nous emploierons la notation d'Iverson : $[A] = 1$ si la propriété A est vérifiée, $[A] = 0$ sinon.

2 Généralités

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , X une partie de I telle que $I \setminus X$ est de mesure nulle, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur chaque segment inclus dans I . Pour fixer les idées, nous supposons que $0 \in I$.

Considérons les quatre ensembles suivants :

- l'ensemble \mathcal{C} des points de X où f est continue;
- l'ensemble \mathcal{L} des points $x_0 \in X$ tels que

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(x) - f(x_0)| dx \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0);$$

- l'ensemble \mathcal{L}^1 des points $x_0 \in I$ tels qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ avec

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(x) - \alpha| dx \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0);$$

- l'ensemble \mathcal{D} des points de dérivabilité de la fonction

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (x \in I).$$

L'ensemble \mathcal{C} est l'ensemble de Lebesgue de f , et \mathcal{L}^1 est l'« ensemble de Lebesgue L^1 » de f (voir par exemple [2], §2). On a

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{L}^1 \subset \mathcal{D},$$

chaque inclusion pouvant être stricte. L'ensemble $I \setminus \mathcal{L}$ est de mesure nulle (théorème de Lebesgue).

Le cas de la fonction de Brjuno, que nous analysons en détail dans cet article, est un exemple de la situation générale suivante. Soit $f_n : I \rightarrow [0, \infty[$ ($n \geq 0$) une suite de fonctions intégrables telle que

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x)$$

soit intégrable sur I . Comment déterminer les ensembles \mathcal{C} , \mathcal{L} , \mathcal{L}^1 et \mathcal{D} à partir de la connaissance des fonctions f_n ?

Sans entrer plus avant dans l'étude de ce problème en toute généralité, contentons-nous d'indiquer un exemple montrant qu'un point $x_0 \in I$ tel que :

- chaque fonction f_n est continue en x_0

et

- la série $f(x_0)$ converge,

n'est pas nécessairement un point de dérivabilité de F . Il suffit de prendre $I = \mathbb{R}$, $f_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$,

$$f_n(t) = \begin{cases} |t| & \text{si } |t| \leq n^{-2/3} \\ 0 & \text{si } |t| > n^{-2/3}. \end{cases}$$

Chaque f_n est continue en 0 avec $f_n(0) = 0$, donc $f(0) = 0$. Cependant $f(x) = |x|^{-1/2} - |x|\{|x|^{-3/2}\}$ ($x \neq 0$), donc F n'est pas dérivable en 0.

Si f est la fonction de Brjuno Φ , on a $\mathcal{C} = \emptyset$ (la fonction de Brjuno est non bornée au voisinage de tout point de $[0, 1]$, au vu, par exemple, du point (iii) du théorème 2) et $\mathcal{L} = \mathcal{L}^1 = \mathcal{D}$ est l'ensemble des nombres de Brjuno, d'après le théorème 1 et le point (ii) du théorème 2.

3 Fractions continues

Dans cette section nous effectuons quelques rappels sur la théorie des fractions continues et fournissons quelques estimations élémentaires concernant les fonctions α_k et β_k .

3.1 Quotients partiels, réduites

Pour $k \in \mathbb{N}$, nous définissons la fonction [†]

$$a_k : X \rightarrow \mathbb{N}$$

par les relations $a_0 = 0$ et $a_k = \lfloor 1/\alpha_{k-1} \rfloor$ ($k \geq 1$). Les fonctions a_k , $k \geq 1$, sont à valeurs dans \mathbb{N}^* . On appelle $a_k(x)$ le « k^{e} quotient partiel » de x . Avec la notation classique

$$[X_0; X_1, \dots, X_k] = X_0 + \frac{1}{X_1 + \frac{1}{X_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{X_{k-1} + \frac{1}{X_k}}}}},$$

on a pour tout $k \geq 0$,

$$x = [a_0(x); a_1(x), \dots, a_{k-1}(x), a_k(x) + \alpha_k(x)] \quad (x \in X).$$

On définit aussi les fonctions $p_k, q_k : X \rightarrow \mathbb{N}$ par les relations

$$\begin{array}{ll} p_{-1} = 1 & q_{-1} = 0 \\ p_0 = 0 & q_0 = 1 \\ p_1 = 1 & q_1 = a_1 \\ \vdots & \vdots \\ p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} & q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad (k \geq 1) \end{array}$$

de sorte que

$$[a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, t] = \frac{p_{k-1}t + p_{k-2}}{q_{k-1}t + q_{k-2}} \quad (k \geq 1, t > 0),$$

et

$$[a_0; a_1, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}.$$

Les fonctions q_k ($k \geq 0$) et p_k ($k \geq 1$) sont à valeurs dans \mathbb{N}^* . La fraction $p_k(x)/q_k(x)$ est appelée la « k^{e} réduite » de x . Elle est irréductible car

$$p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1}. \quad (9)$$

Une autre identité dont nous aurons l'usage est

$$p_{k+1} q_{k-1} - p_{k-1} q_{k+1} = (-1)^{k-1} a_{k+1}. \quad (10)$$

La suite $\{q_k\}_{k \geq -1}$ est à croissance au moins exponentielle. En effet, on a pour tout $k \geq 1$

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \geq q_{k-1} + q_{k-2} \geq 2q_{k-2} \quad (11)$$

[†]. Pour tout ce qui concerne ce paragraphe on pourra se référer par exemple à [7], chapter 7.

En particulier,

$$q_k \geq F_{k+1} \quad (k \geq 0), \quad (12)$$

où F_n est le n^{e} nombre de Fibonacci ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ pour $n \geq 1$). On déduit également de (11) les inégalités

$$\begin{aligned} q_0 + q_2 + \cdots + q_{2k} &\leq 2q_{2k} \\ q_1 + q_3 + \cdots + q_{2k+1} &\leq 2q_{2k+1}, \end{aligned}$$

d'où la majoration

$$q_0 + q_1 + \cdots + q_k \leq 4q_k, \quad (13)$$

valable pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3.2 Fonctions α_k et β_k

De la formule

$$\begin{aligned} x &= [a_0(x); a_1(x), \dots, a_{k-1}(x), a_k(x) + \alpha_k(x)] \\ &= \frac{p_k(x) + \alpha_k(x)p_{k-1}(x)}{q_k(x) + \alpha_k(x)q_{k-1}(x)}, \end{aligned} \quad (14)$$

on déduit

$$\alpha_k(x) = -\frac{p_k(x) - xq_k(x)}{p_{k-1}(x) - xq_{k-1}(x)}. \quad (15)$$

Cela implique les identités

$$\beta_k(x) = (-1)^{k-1} (p_k(x) - xq_k(x)) \quad (16)$$

$$= \frac{1}{q_{k+1}(x) + \alpha_{k+1}(x)q_k(x)} \quad (x \in X). \quad (17)$$

On dispose par conséquent de l'encadrement

$$\frac{1}{q_{k+1} + q_k} \leq \beta_k \leq \frac{1}{q_{k+1}} \quad (k \geq -1). \quad (18)$$

Une majoration plus générale nous sera utile : la définition (5) entraîne

$$\beta_{i+j} = \beta_i \cdot \beta_{j-1} \circ \alpha_{i+1} \quad (i \geq -1, j \geq 0), \quad (19)$$

d'où l'on déduit, d'après (18) et (12),

$$\beta_{i+j} \leq \frac{1}{q_{i+1}F_{j+1}}. \quad (20)$$

Par ailleurs, notant que $[1/\alpha_k] = a_{k+1}$ et que $a_{k+1} = (q_{k+1} - q_{k-1})/q_k$, nous avons d'après (11)

$$\frac{q_{k+1}}{2q_k} \leq \frac{1}{\alpha_k} \leq a_{k+1} + 1 \quad (k \geq 0). \quad (21)$$

Il découle alors de (18) et (21) l'encadrement

$$\frac{\log q_{k+1}}{2q_k} - \frac{\log 2q_k}{2q_k} \leq \gamma_k \leq \frac{\log(q_{k+1} + [k = 0])}{q_k} \quad (k \geq 0). \quad (22)$$

En particulier, $x \in X$ est un nombre de Brjuno si, et seulement si, la série

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\log q_{k+1}(x)}{q_k(x)} \quad (23)$$

est convergente.

Enfin, nous utiliserons à plusieurs reprises une majoration de la somme des inverses des nombres de Fibonacci :

$$\sum_{k \geq 0} 1/F_{k+1} \leq 3,36. \quad (24)$$

4 Majoration du module de continuité de Ψ

Sans utiliser la notion de cellule (§5), on peut déjà donner une majoration utile du module de continuité de Ψ , proposition 2 ci-dessous. Pour la démontrer, nous majorons d'abord l'intégrale de $\log(1/\alpha_k)$ sur un intervalle de longueur h , proposition 1 ci-dessous.

Notre démonstration de la proposition 1 requiert une majoration de la fonction Γ d'Euler, sans doute classique mais pour laquelle nous ne disposons pas de référence. Rappelons que pour $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Lemme 1 *Pour $q \in [2, \infty[$, on a*

$$2\Gamma(q+1) \leq q^q.$$

Démonstration

Notons ψ la dérivée logarithmique de la fonction Γ . L'inégalité proposée est vraie pour $q = 2$. Ensuite, il suffit de voir que les dérivées logarithmiques des deux membres vérifient la même inégalité pour $q \geq 2$, c'est-à-dire que

$$\psi(q+1) \leq \log q + 1 \quad (q \geq 2). \quad (25)$$

Or, nous disposons de la formule classique

$$\psi(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \quad (x \neq 0, -1, -2, \dots), \quad (26)$$

où γ désigne la constante d'Euler. Pour $x > 0$, on a donc

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n(n+x)} \\ &\leq -\gamma - \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x+1} + \int_1^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \\ &= 1 - \gamma - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \log(x+1). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\psi(q+1) - \log q &\leq \log\left(1 + \frac{2}{q}\right) - \frac{1}{q+1} - \frac{1}{q+2} + 1 - \gamma \\ &\leq 1 \quad (q \geq 2).\end{aligned}$$

□

Proposition 1 Soit I un intervalle de longueur $h \leq e^{-2}$, inclus dans $[0, 1]$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\int_I \log(1/\alpha_k(x)) dx \leq eh \log(1/h).$$

Démonstration

Pour $q > 1$ et $p = q/(q-1)$, l'inégalité de Hölder donne

$$\int_I \log(1/\alpha_k(x)) dx \leq h^{1/p} \left(\int_0^1 \log^q(1/\alpha_k(x)) dx \right)^{1/q}.$$

Comme α laisse la mesure μ invariante, nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log^q(1/\alpha_k(x)) dx &\leq 2 \int_0^1 \log^q(1/\alpha_k(x)) \frac{dx}{1+x} = 2 \int_0^1 \log^q(1/x) \frac{dx}{1+x} \\ &\leq 2 \int_0^1 \log^q(1/x) dx = 2\Gamma(q+1).\end{aligned}$$

D'après le lemme 1, il suit

$$\int_I \log(1/\alpha_k(x)) dx \leq qh^{1-1/q} \quad (q \geq 2).$$

En effectuant le choix $q = \log(1/h)$, pour lequel $q \geq 2$ d'après l'hypothèse faite sur h , nous obtenons la majoration annoncée. □

Proposition 2 On a

$$\omega(h) \leq 10h \log 1/h \quad (0 < h \leq e^{-2}).$$

Démonstration

Cela résulte de la proposition 1, et des majorations (12), (18) et (24). □

5 Notion de cellule

5.1 Définition et propriétés

Soit $b_0 = 0, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{N}^*$. La cellule (de profondeur k) $c(b_1, \dots, b_k)$ est l'intervalle ouvert d'extrémités $[b_0; b_1, \dots, b_k]$ et $[b_0; b_1, \dots, b_{k-1}, b_k + 1]$.

La notion de cellule n'est pas nouvelle : elle intervient naturellement dans le cadre de la théorie métrique et ergodique des fractions continues sous l'appellation de cylindre (cf [1] page 30 et chapitre 3.5 par exemple) ou d'intervalle d'ordre n (cf [3] §12 par exemple).

Nous énonçons à présent quelques propriétés élémentaires concernant les cellules.

- Dans la cellule $\mathfrak{c}(b_1, \dots, b_k)$, les fonctions a_j, p_j, q_j sont constantes pour $j \leq k$:

$$a_j(x) = b_j, \quad \frac{p_j(x)}{q_j(x)} = [b_0; b_1, \dots, b_j] \quad (x \in \mathfrak{c}(b_1, \dots, b_j)).$$

- La cellule $\mathfrak{c}(b_1, \dots, b_k)$ est l'intervalle ouvert d'extrémités

$$\frac{p_k}{q_k} \quad \text{et} \quad \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}$$

(dans cet ordre si k est pair ; dans l'ordre opposé si k est impair). Sa longueur est

$$\frac{1}{q_k(q_k + q_{k-1})}. \quad (27)$$

- On a

$$\alpha(\mathfrak{c}(b_1, \dots, b_k) \cap X) = \mathfrak{c}(b_2, \dots, b_k) \cap X.$$

• Soit $k \geq 1$, et $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}(b_1, \dots, b_k)$ une cellule de profondeur k . Les cellules de profondeur $k+1$ incluses dans \mathfrak{c} forment une suite $(\mathfrak{c}_n)_{n \geq 1}$ d'intervalles ouverts qui constitue une partition de \mathfrak{c} privée d'une partie de \mathbb{Q} (les rationnels de la forme $[b_0; b_1, \dots, b_k, n]$, n décrivant \mathbb{N}^*).

La cellule \mathfrak{c}_n est l'intervalle d'extrémités

$$[b_0; b_1, \dots, b_k, n] = \frac{np_k + p_{k-1}}{nq_k + q_{k-1}}$$

et $[b_0; b_1, \dots, b_{k-1}, b_k, n+1] = \frac{(n+1)p_k + p_{k-1}}{(n+1)q_k + q_{k-1}}.$

Ainsi \mathfrak{c}_n et \mathfrak{c}_{n+1} sont contiguës, et \mathfrak{c}_n est l'ensemble des nombres de la forme

$$\frac{sp_k + p_{k-1}}{sq_k + q_{k-1}}, \quad n < s < n+1.$$

Dans \mathfrak{c}_n , la fonction q_{k+1} a la valeur constante $nq_k + q_{k-1}$. Observons que $\frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}$ est l'une des extrémités de \mathfrak{c}_1 , mais que $\frac{p_k}{q_k}$ n'est l'extrémité d'aucune cellule \mathfrak{c}_n . En revanche, $\frac{p_k}{q_k}$ est la limite quand n tend vers l'infini des extrémités de \mathfrak{c}_n .

5.2 Distance d'un irrationnel donné au bord de la cellule de profondeur k qui le contient

Soit $x \in X$ et $k \in \mathbb{N}$. Il existe une unique cellule de profondeur k qui contient x :

$$\mathfrak{c} = \begin{cases} \left[\frac{p_k}{q_k}, \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}} \right[& \text{si } k \text{ est pair} \\ \left[\frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}, \frac{p_k}{q_k} \right[& \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

où l'on a posé $p_j = p_j(x)$, $q_j = q_j(x)$ pour $j \geq -1$. La distance de x au bord de \mathfrak{c} joue un rôle déterminant dans la suite de notre travail. Nous la notons $\delta_k(x)$. On a par exemple

$$\delta_0(x) = \min(x, 1 - x) \quad (x \in X).$$

Observons tout de suite que la suite $k \mapsto \delta_k(x)$ est décroissante (au sens large) et tend vers 0 quand k tend vers l'infini. Cherchons maintenant à exprimer $\delta_k(x)$ en termes des fonctions précédemment définies. On a d'abord, d'après (16),

$$x - \frac{p_k}{q_k} = (-1)^k \frac{\beta_k(x)}{q_k}. \quad (28)$$

Pour la distance de x à l'autre extrémité de \mathfrak{c} , on a

$$\begin{aligned} x - \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}} &= (-1)^{k-1} \frac{\beta_{k+1}(x)}{q_{k+1}} + \left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}} \right) \\ &= (-1)^{k-1} \left(\frac{\beta_{k+1}(x)}{q_{k+1}} + \frac{a_{k+1} - 1}{q_{k+1}(q_k + q_{k-1})} \right), \end{aligned}$$

où la deuxième égalité résulte des identités (9) et (10). Nous obtenons ainsi la formule

$$\delta_k = \min\left(\frac{\beta_k}{q_k}, \frac{\beta_{k+1}}{q_{k+1}} + \frac{a_{k+1} - 1}{q_{k+1}(q_k + q_{k-1})}\right).$$

Proposition 3 *Pour $k \in \mathbb{N}$ on a*

$$\delta_k \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} \quad \text{et} \quad \delta_k \geq \begin{cases} \frac{1/2}{q_{k+1} q_{k+2}} & \text{si } a_{k+1} = 1 \\ \frac{1/2}{q_k q_{k+1}} & \text{si } a_{k+1} \geq 2. \end{cases}$$

Démonstration

On a d'abord, d'après (18),

$$\delta_k \leq \frac{\beta_k}{q_k} \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Ensuite, si $a_{k+1} = 1$, toujours d'après (18),

$$\delta_k = \frac{\beta_{k+1}}{q_{k+1}} \geq \frac{1/2}{q_{k+1} q_{k+2}},$$

et si $a_{k+1} \geq 2$,

$$\delta_k \geq \min\left(\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})}, \frac{1}{q_{k+1}(q_k + q_{k-1})}\right) \geq \frac{1/2}{q_k q_{k+1}}. \quad \square$$

La proposition suivante sera utilisée lors de la preuve de la proposition 11 *infra*.

Proposition 4 *Pour $k \in \mathbb{N}$ on a*

$$\frac{\log(1/2\delta_k)}{q_k} \leq 2 \frac{\log q_{k+1}}{q_k} + 2 \frac{\log q_{k+2}}{q_{k+1}}.$$

Démonstration

Si $a_{k+1} \geq 2$ on a, d'après la proposition 3,

$$\frac{\log(1/2\delta_k)}{q_k} \leq \frac{\log(q_k q_{k+1})}{q_k} \leq 2 \frac{\log q_{k+1}}{q_k}.$$

Si $a_{k+1} = 1$, on a

$$\frac{\log(1/2\delta_k)}{q_k} \leq \frac{\log(q_{k+1} q_{k+2})}{q_k}.$$

Mais dans ce cas on a aussi $q_{k+1} \leq 2q_k$, d'où

$$\frac{\log q_{k+2}}{q_k} \leq 2 \frac{\log q_{k+2}}{q_{k+1}},$$

ce qui démontre l'inégalité annoncée. □

5.3 Profondeur d'un nombre rationnel

Soit r un nombre rationnel, $0 < r < 1$, mis sous forme irréductible p/q . Il peut s'écrire d'une et une seule façon sous la forme

$$r = [0; b_1, \dots, b_k]$$

avec $k \in \mathbb{N}^*$, $b_i \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq i \leq k$, et $b_k \geq 2$. Nous dirons alors que r est de profondeur $\dagger k$. Par convention, 0 et 1 sont de profondeur 0.

Écrivons $[0; b_1, \dots, b_{k-1}]$ sous forme réduite p_{k-1}/q_{k-1} (si $k = 1$, on a $q_0 = 1$). Le nombre rationnel r est une extrémité de deux cellules de profondeur k (qui sont donc contigües) :

$$\mathfrak{c} \text{ d'extrémités } [0; b_1, \dots, b_{k-1}, b_k - 1] = \frac{p - p_{k-1}}{q - q_{k-1}} \text{ et } r;$$

$$\mathfrak{c}' \text{ d'extrémités } r \text{ et } [0; b_1, \dots, b_{k-1}, b_k + 1] = \frac{p + p_{k-1}}{q + q_{k-1}}.$$

Comme $b_k \geq 2$, on a $q_{k-1} \leq q/2$. La longueur de \mathfrak{c} est

$$\frac{1}{(q - q_{k-1})q} > \frac{1}{q^2}.$$

tandis que la longueur de \mathfrak{c}' est

$$\frac{1}{q(q + q_{k-1})} \geq \frac{2}{3q^2}.$$

En particulier, on a l'inclusion

$$\left]r - \frac{2}{3q^2}, r + \frac{2}{3q^2}\right[\setminus \{r\} \subset \mathfrak{c} \cup \mathfrak{c}'.$$

\dagger . On trouvera dans [6] une liste de problèmes arithmétiques sur la profondeur des nombres rationnels.

5.4 Profondeur et épaisseur d'un segment inclus dans $]0, 1[$

Soit $I = [a, b]$ un segment inclus dans $]0, 1[$, de longueur $h = b - a > 0$ et d'extrémités a, b irrationnelles. Il existe un unique entier naturel K tel que I soit inclus dans une cellule de profondeur K , mais dans aucune cellule de profondeur $K + 1$. Nous dirons alors que I est de profondeur K . Dans le cas où $x = (a + b)/2$ est aussi irrationnel, le nombre K est défini par l'encadrement

$$\delta_{K+1}(x) < h/2 < \delta_K(x). \quad (29)$$

Signalons une petite subtilité. Il est exact que la longueur d'un segment I tend uniformément vers 0 quand sa profondeur K tend vers l'infini : on a d'après (27) et (12)

$$|I| \leq \frac{1}{F_{K+1}F_{K+2}}.$$

En revanche, $|I|$ peut tendre vers 0 alors que K garde une valeur constante, 0 par exemple : il suffit que $1/2$ appartienne à I . Cela étant, dans le cas où $x \in X$ est fixé et $I = [x - h/2, x + h/2]$ avec $x \pm h/2 \in X$, la profondeur $K = K(x, h)$ de I tend vers l'infini quand h tend vers 0 puisque

$$\frac{1/2}{q_{K+2}(x)q_{K+3}(x)} < h$$

d'après (29) et la proposition 3.

Nous définissons également l'épaisseur de I comme le nombre de cellules de profondeur $K + 1$ qui ont une intersection non vide avec I , où K est la profondeur de I . L'épaisseur de I est un nombre entier supérieur ou égal à 2.

5.5 Convention

Nous redéfinissons maintenant, et pour toute la suite, les fonctions $a_k, p_k, q_k, \alpha_k, \beta_k$ en les prolongeant par continuité (sans changer de notation) sur chaque cellule de profondeur k (et donc également sur chaque cellule de profondeur supérieure à k). Ainsi, en posant $\mathbf{c} = \mathbf{c}(b_1, \dots, b_k)$, on aura pour $x \in \mathbf{c}$:

$$\begin{aligned} a_k(x) &= b_k \\ \frac{p_k(x)}{q_k(x)} &= \frac{p_k}{q_k} = [b_0; b_1, \dots, b_k] \\ \alpha_k(x) &= \frac{q_k x - p_k}{-q_{k-1} x + p_{k-1}} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\beta_k(x) = (-1)^{k-1} (p_k - x q_k). \quad (31)$$

En particulier, α_k est dérivable sur \mathbf{c} et y vérifie

$$\alpha'_k = (-1)^k \beta_{k-1}^{-2} = (-1)^k (q_k + \alpha_k q_{k-1})^2. \quad (32)$$

On a aussi la relation valable sur \mathbf{c}

$$\beta_{k-1} = \frac{1}{q_k} (1 - q_{k-1} \beta_k). \quad (33)$$

6 Comportement de Ψ au voisinage d'un point rationnel

Nous commençons par traiter les cas des points 0 et 1.

Lemme 2 Pour $0 < x \leq 1$, on a

$$\Psi(x) = x \log(1/x) + O(x), \quad (34)$$

et

$$\Psi(1) - \Psi(1-x) = x \log(1/x) + O(x) \quad (35)$$

Démonstration

Pour $0 < x \leq 1$, on a, d'après l'équation fonctionnelle de Φ ,

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \int_0^x \Phi(t) dt = \int_0^x \left(t\Phi(\alpha(t)) + \log(1/t) \right) dt \\ &= \int_0^x \log(1/t) dt + O\left(x \int_0^x \Phi(\alpha(t)) dt \right) = x \log(1/x) + O(x), \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du fait que $\Phi \circ \alpha \in L^1(0, 1)$. Pour établir (35), il suffit de traiter le cas $0 < x < 1/2$. On a

$$\begin{aligned} \Psi(1) - \Psi(1-x) &= \int_{1-x}^1 \Phi(t) dt = \int_{1-x}^1 \left(t\Phi(\alpha(t)) + \log(1/t) \right) dt \\ &= \int_{1-x}^1 \left(t\Phi((1-t)/t) + \log(1/t) \right) dt. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $u = (1-t)/t$ puis en employant (34), nous obtenons

$$\begin{aligned} \Psi(1) - \Psi(1-x) &= \int_0^{x/(1-x)} \left(\frac{\Phi(u)}{1+u} + \log(1+u) \right) \frac{du}{(1+u)^2} \\ &= \int_0^{x/(1-x)} \left(\Phi(u) + O(u\Phi(u)) + O(u) \right) du \\ &= \frac{x}{1-x} \log \frac{1-x}{x} + O(x) \\ &= x \log(1/x) + O(x). \end{aligned} \quad \square$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le point (iii) du théorème 2.

Proposition 5 On a uniformément pour r rationnel et h réel tels que $0 \leq r, r+h \leq 1$:

$$\Psi(r+h) - \Psi(r) = \frac{1}{q} h \log(1/|h|) + O(h \log(2q)), \quad (36)$$

où q est le dénominateur de l'écriture irréductible de r .

Démonstration

Au vu du lemme 2, il nous suffit de considérer le cas où $q \geq 2$.

Soit $K \in \mathbb{N}^*$ la profondeur du nombre rationnel r . Commençons par supposer que $0 < |h| < 2/3q^2$. On sait alors, d'après le §5.3, que l'intervalle ouvert d'extrémités r et $r+h$ est inclus dans l'une des deux cellules de profondeur K :

- \mathfrak{c} d'extrémités $\frac{p-p_{K-1}}{q-q_{K-1}}$ et r ;
- \mathfrak{c}' d'extrémités r et $\frac{p+p_{K-1}}{q+q_{K-1}}$.

Les trois nombres $\frac{p-p_{K-1}}{q-q_{K-1}}$, r et $\frac{p+p_{K-1}}{q+q_{K-1}}$ se succèdent dans cet ordre si K est pair, dans l'ordre inverse si K est impair. Par conséquent,

$$(-1)^K h > 0 \Leftrightarrow r+h \in \mathfrak{c}'.$$

On a,

$$\begin{aligned} \Psi(r+h) - \Psi(r) &= \int_r^{r+h} \Phi(t) dt \\ &= \sum_{k < K} \int_r^{r+h} \gamma_k(t) dt + \int_r^{r+h} \beta_{K-1}(t) \Phi(\alpha_K(t)) dt, \end{aligned}$$

d'après l'identité (8). Or, d'après (22),

$$\left| \int_r^{r+h} \sum_{k < K} \gamma_k(t) dt \right| \leq |h| \sum_{k < K} \frac{\log q_{k+1}}{q_k} \leq |h| \log q \sum_{k < K} \frac{1}{F_{k+1}} \leq 4|h| \log q.$$

Il reste donc à établir

$$\int_r^{r+h} \beta_{K-1}(t) \Phi(\alpha_K(t)) dt = \frac{h}{q} \log(1/|h|) + O(h \log q). \quad (37)$$

La fonction α_K est définie sur chacune des cellules \mathfrak{c} et \mathfrak{c}' . Suivant que $r+h$ appartienne à \mathfrak{c} ou à \mathfrak{c}' , nous prolongeons α_K (par continuité à droite ou à gauche suivant la parité de K) respectivement à $\mathfrak{c} \cup \{r\}$ ou $\mathfrak{c}' \cup \{r\}$, et dans l'intégrale du premier membre de (37) nous effectuons le changement de variables $u = \alpha_K(t)$. Distinguons les deux cas.

• Premier cas : $(-1)^K h > 0$. Dans ce cas, l'intervalle d'extrémités r et $r+h$ est inclus dans $\overline{\mathfrak{c}'}$. On a $q_K = q$, $p_K = p$ et

$$u = \alpha_K(t) = \frac{q_K t - p_K}{-q_{K-1} t + p_{K-1}},$$

de sorte que, compte tenu de (32),

$$\int_r^{r+h} \beta_{K-1}(t) \Phi(\alpha_K(t)) dt = (-1)^K \int_{\alpha_K(r)}^{\alpha_K(r+h)} \Phi(u) \frac{du}{(q_K + q_{K-1}u)^3}.$$

On a $\alpha_K(r) = 0$ et

$$\begin{aligned} \alpha_K(r+h) &= \frac{q^2 h}{-q_{K-1} p - q_{K-1} q h + p_{K-1} q} \\ &= \frac{q^2 |h|}{1 - |h| q q_{K-1}}. \end{aligned}$$

Nous posons donc

$$x' = \frac{q^2|h|}{1 - |h|qq_{K-1}}. \quad (38)$$

Comme $q_{K-1} \leq q/2$, on a

$$\begin{aligned} \int_r^{r+h} \beta_{K-1}(t)\Phi(\alpha_K(t))dt &= \frac{(-1)^K}{q^3} \int_0^{x'} \Phi(u) \frac{du}{\left(1 + u\frac{q_{K-1}}{q}\right)^3} \\ &= \frac{(-1)^K}{q^3} \int_0^{x'} \Phi(u)du + O(h) \\ &= \frac{(-1)^K}{q^3} x' \log(1/x') + O(h), \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de (34).

• Deuxième cas : $(-1)^K h < 0$. Dans ce cas, l'intervalle d'extrémités r et $r+h$ est inclus dans $\bar{\tau}$. Dans cette cellule, on a

$$u = \alpha_K(t) = \frac{(q - q_{K-1})t - p + p_{K-1}}{-q_{K-1}t + p_{K-1}},$$

Par suite, $\alpha_K(r) = 1$ et

$$\begin{aligned} \alpha_K(r+h) &= \frac{(q - q_{K-1})\frac{p}{q} - (p - p_{K-1}) + h(q - q_{K-1})}{-q_{K-1}\frac{p}{q} + p_{K-1} - q_{K-1}h} \\ &= 1 + \frac{hq^2}{(-1)^K - qq_{K-1}h} = 1 - x, \end{aligned}$$

avec cette fois

$$x = \frac{q^2|h|}{1 + |h|qq_{K-1}}. \quad (39)$$

Nous avons donc, d'après (35)

$$\begin{aligned} \int_r^{r+h} \beta_{K-1}(t)\Phi(\alpha_K(t))dt &= (-1)^{K-1} \int_{1-x}^1 \Phi(u) \frac{du}{(q + (u-1)q_{K-1})^3} \\ &= \frac{(-1)^{K-1}}{q^3} \int_{1-x}^1 \Phi(u)du + O\left(q^{-3} \int_{1-x}^1 \Phi(u)(1-u)du\right) \\ &= \frac{(-1)^{K-1}}{q^3} \int_{1-x}^1 \Phi(u)du + O(h) \\ &= \frac{(-1)^{K-1}}{q^3} x \log(1/x) + O(h). \end{aligned}$$

Nous avons donc dans les deux cas,

$$\int_r^{r+h} \beta_{K-1}(t)\Phi(\alpha_K(t))dt = \frac{(-1)^{K-1}}{q^3} y \log(1/y) + O(h) \quad (y = x \text{ ou } x')$$

Comme $q_{K-1} < q/2$ et $|h| < 2/3q^2$, nous avons

$$\log(1/y) = \log(1/|h|) + O(\log q),$$

et

$$y = q^2|h| + O(h^2q^4),$$

ce qui entraîne bien la conclusion souhaitée (on a en fait un $O(hq^{-1} \log q)$ dans (37)).

Si $|h| \geq 2/3q^2$, le second membre de (36) se ramène à $O(h \log q)$. L'assertion résulte alors de la proposition 2. \square

7 Estimations en moyenne de γ_k sur un intervalle de profondeur K

Soit I un intervalle inclus dans $]0, 1[$. Notre objectif est ici de majorer l'intégrale $\int_I \gamma_k(t) dt$, où γ_k est définie par (6). Pour simplifier les formulations et les démonstrations qui suivent, nous supposons dans tout ce §7 que I est un segment dont les extrémités et le milieu sont irrationnels. Nous noterons respectivement h , x , K et E la longueur, le milieu, la profondeur et l'épaisseur de I . Pour $j \leq K$, nous noterons p_j , q_j les valeurs constantes de ces fonctions sur I .

La discussion portera essentiellement sur les tailles respectives de k et K . Nous ferons fréquemment usage, sans toujours le mentionner explicitement, des encadrements (18) et (21). Enfin nous supposerons toujours que $h \leq e^{-2}$.

7.1 Le cas $k < K$

Proposition 6 *Pour $k < K$ on a*

$$\begin{aligned} \int_I \gamma_k(t) dt &\leq h \frac{\log(q_{k+1} + [k=0])}{q_k} \\ &\leq \frac{h \log 1/h}{2q_k} + \frac{h^{3/2}}{q_k}. \end{aligned}$$

Démonstration

La première inégalité résulte de (22). Pour la seconde, on observe que I est inclus dans une cellule de longueur $k+1$ dont la longueur est

$$\frac{1}{q_{k+1}(q_{k+1} + q_k)} < \frac{1}{q_{k+1}^2},$$

donc $q_{k+1} < h^{-1/2}$ et

$$\begin{aligned} \log(q_{k+1} + [k=0]) &\leq \log(h^{-1/2} + 1) \\ &\leq \frac{1}{2} \log 1/h + h^{1/2}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. \square

Par ailleurs, lorsque $k < K$, nous disposons d'une majoration uniforme de la dérivée de γ_k dans une cellule de profondeur K , ce qui nous conduit au résultat suivant.

Proposition 7 Pour $k < K$, on a

$$\int_I |\gamma_k(t) - \gamma_k(x)| dt \leq \frac{3}{4} q_{k+1} h^2.$$

Démonstration

D'après les formules (30) et (31), la fonction γ_k est dérivable sur \mathfrak{c} pour $k \leq K$, et (31) et (32) fournissent

$$\gamma'_k = (-1)^{k-1} q_{k-1} \log(1/\alpha_k) + \frac{(-1)^{k-1}}{\beta_k}. \quad (40)$$

Nous en déduisons, pour $k < K$, $t \in I$,

$$|\gamma'_k(t)| \leq q_{k-1} \log(a_{k+1} + 1) + q_{k+1} + q_k \leq q_k a_{k+1} + q_{k-1} + 2q_{k+1} = 3q_{k+1}. \quad (41)$$

La conclusion découle alors directement de l'inégalité des accroissements finis et de l'égalité

$$\int_I |t - x| dt = \frac{h^2}{4}. \quad \square$$

7.2 Le cas $k = K$

Dans ce paragraphe et le suivant, nous donnons deux estimations, l'une comparant $\int_I \gamma_K(t) dt$ à $h \log 1/h$, l'autre à h .

Pour la première estimation, un lemme élémentaire sera utile.

Lemme 3 On a

$$\int_I \log(1/t) dt \leq h \log 1/h + h.$$

Démonstration

Comme $t \mapsto \log(1/t)$ est positive et décroissante sur $]0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} \int_I \log(1/t) dt &\leq \int_0^h \log(1/t) dt \\ &= h \log 1/h + h. \end{aligned} \quad \square$$

Proposition 8 On a

$$\int_I \gamma_K(t) dt \leq \frac{h \log 1/h}{q_K} ([E > 2] + [E = 2]/2) + \frac{h}{q_K}.$$

Démonstration

En effet,

$$\begin{aligned}
\int_I \gamma_K(t) dt &= \int_I \beta_{K-1}(t) \log \beta_{K-1}(t) dt + \int_I \beta_{K-1}(t) \log 1/\beta_K(t) dt \\
&\leq \int_I \beta_{K-1}(t) \log 1/\beta_K(t) dt \quad (\text{car } \beta_{K-1}(t) \leq 1) \\
&= \frac{1}{q_K^2} \int_{\beta_K(I)} (1 - u q_{K-1}) \log(1/u) du \quad (\text{où l'on a posé } u = \beta_K(t) \text{ et utilisé (33)}) \\
&\leq \frac{1}{q_K^2} \int_{\beta_K(I)} \log(1/u) du \\
&\leq \frac{1}{q_K^2} |\beta_K(I)| \log 1/|\beta_K(I)| + \frac{|\beta_K(I)|}{q_K^2} \quad (\text{d'après le lemme 3}) \\
&= \frac{1}{q_K} (q_K h) \log(1/q_K h) + \frac{q_K h}{q_K} \\
&= \frac{h}{q_K} \log 1/h + \frac{(1 - \log q_K)h}{q_K},
\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition dans le cas où $E > 2$.

D'autre part, si $E = 2$, les nombres $x \pm h/2$ se situent chacun dans l'une de deux cellules adjacentes, disons $\mathfrak{c}(b_1, \dots, b_K, b_{K+1} - 1)$ et $\mathfrak{c}(b_1, \dots, b_K, b_{K+1})$, où $b_{K+1} \geq 2$. Posons

$$[0; b_1, \dots, b_K, b_{K+1}] = \frac{p}{q} \quad ((p, q) = 1),$$

et q est d'ailleurs la valeur maximale de la fonction q_{K+1} sur I .

La longueur de I est inférieure à la somme des longueurs de ces deux cellules :

$$h \leq \left| \frac{p + p_K}{q + q_K} - \frac{p - p_K}{q - q_K} \right| = \frac{2}{(q + q_K)(q - q_K)}.$$

Comme $b_{K+1} \geq 2$, on a $q = b_{K+1} q_K + q_{K-1} \geq 2q_K$, ce qui implique

$$h \leq \frac{4}{q^2}. \quad (42)$$

Enfin, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_I \gamma_K(t) dt &\leq \frac{1}{q_K} \int_I \log(q_{K+1}(t) + 1) dt \quad (\text{d'après (22)}) \\
&\leq \frac{h}{q_K} \log(q + 1) \\
&\leq \frac{h}{q_K} \log(2h^{-1/2} + 1) \\
&\leq \frac{h}{2q_K} \log 1/h + \frac{h \log 2 + h^{3/2}/2}{q_K} \\
&\leq \frac{h}{2q_K} \log 1/h + \frac{h}{q_K}. \quad \square
\end{aligned}$$

Proposition 9 *On a*

$$\int_I \gamma_K(t) dt \leq 16h\gamma_K(x) + \frac{h}{q_K}(6 \log q_K + 6).$$

Démonstration

D'après (18), on a

$$\begin{aligned} \int_I \gamma_K(t) dt &= \int_I \beta_{K-1}(t) \log(1/\alpha_K(t)) dt \\ &= \int_I \beta_{K-1}(t)^3 \cdot \beta_{K-1}(t)^{-2} \log(1/\alpha_K(t)) dt \\ &\leq q_K^{-3} \int_I \beta_{K-1}(t)^{-2} \log(1/\alpha_K(t)) dt. \end{aligned}$$

Comme $\alpha'_K(t) = (-1)^K / \beta_{K-1}^2(t)$, il suit

$$\int_I \gamma_K(t) dt \leq q_K^{-3} \int_{\alpha_K(I)} \log(1/u) du. \quad (43)$$

L'intervalle $\alpha_K(I)$ a pour extrémités $\alpha_K(x-h/2)$ et $\alpha_K(x+h/2)$. Or, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$|\alpha_K(x \pm h/2) - \alpha_K(x)| \leq (h/2) \max_{\xi \in I} \beta_{K-1}(\xi)^{-2} \leq 4q_K^2 h.$$

Supposons d'abord $8q_K^2 h \leq \alpha_K(x)$. Nous en déduisons

$$\frac{1}{u} \leq \frac{2}{\alpha_K(x)} \quad (u \in \alpha_K(I)),$$

donc,

$$\begin{aligned} \int_I \gamma_K(t) dt &\leq q_K^{-3} \log(2/\alpha_K(x)) \int_{\alpha_K(I)} du \leq q_K^{-3} \log(2/\alpha_K(x)) \cdot 8q_K^2 h \\ &\leq 16h\beta_{K-1}(x) \log(1/\alpha_K(x)) + \frac{8h}{q_K} \log 2 \\ &\leq 16h\gamma_K(x) + \frac{6h}{q_K}. \end{aligned}$$

Supposons ensuite $8q_K^2 h \geq \alpha_K(x)$. Nous avons dans ce cas, d'après la proposition 1,

$$\begin{aligned} \int_I \gamma_K(t) dt &\leq \max_{t \in I} |\beta_{K-1}(t)| e h \log(1/h) \leq \frac{e}{q_K} h \log(8q_K^2/\alpha_K(x)) \\ &= \frac{e}{q_K} h \log(1/\alpha_K(x)) + \frac{h}{q_K} (3e \log 2 + 2e \log q_K) \\ &\leq 6h\gamma_K(x) + \frac{h}{q_K} (6 \log q_K + 6), \end{aligned}$$

d'où la conclusion. □

7.3 Le cas $k > K$

Nos calculs nécessiteront une majoration élémentaire.

Lemme 4 Soit m et n des nombres entiers tels que $1 \leq m < n$. On a alors

$$\sum_{m \leq \ell \leq n} \frac{1}{\ell^3} \leq 3 \frac{n-m}{m^2 n}.$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq \ell \leq n} \frac{1}{\ell^3} &\leq \frac{1}{m^3} + \int_m^n \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{m^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{1}{m^3} + \frac{n^2 - m^2}{2m^2 n^2} \leq \frac{1}{m^3} + \frac{n-m}{m^2 n}. \end{aligned}$$

Maintenant, comme $1 \leq m \leq n-1$, on a $m(n-m) \geq n-1 \geq n/2$, donc

$$\frac{1}{m^3} \leq 2 \frac{n-m}{m^2 n},$$

d'où le résultat. □

Nous sommes maintenant en mesure de traiter le cas $k > K$.

Proposition 10 Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > K$ on a

$$\int_I \gamma_k(t) dt \leq [E = 2] \frac{6}{q_{K+1}(x) F_{k-K}} h \log 1/h + [E > 2] \frac{72}{q_K F_{k-K}} h.$$

Démonstration

Soit \mathfrak{c} la cellule de profondeur K qui contient I . Comme \mathfrak{c} est l'intervalle d'extrémités

$$\frac{p_K}{q_K} \quad \text{et} \quad \frac{p_K + p_{K-1}}{q_K + q_{K-1}},$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} x + (-1)^K h/2 &= \frac{u p_K + p_{K-1}}{u q_K + q_{K-1}} \\ x + (-1)^{K-1} h/2 &= \frac{v p_K + p_{K-1}}{v q_K + q_{K-1}}, \end{aligned}$$

avec $1 \leq u < 1/\alpha_K(x) < v < +\infty$. Posons $m = \lfloor u \rfloor$ et $n = \lfloor v \rfloor$, de sorte que $1 \leq m \leq a_{K+1}(x) \leq n$ et $E = n - m + 1$, $n > m$.

On a donc, en utilisant l'identité (9),

$$\begin{aligned}
h &= \left| \frac{up_K + p_{K-1}}{uq_K + q_{K-1}} - \frac{vp_K + p_{K-1}}{vq_K + q_{K-1}} \right| \\
&= \frac{v - u}{(uq_K + q_{K-1})(vq_K + q_{K-1})} \\
&\geq \frac{v - u}{q_K^2(u + 1)(v + 1)} \\
&\geq \frac{v - u}{6q_K^2 mn},
\end{aligned} \tag{44}$$

où la dernière minoration découle de $u + 1 \leq 3m$ et $v + 1 \leq 2n$.

Rappelons que les cellules de profondeur $K + 1$ incluses dans \mathfrak{c} sont les intervalles

$$\mathfrak{c}_\ell = \left\{ \frac{sp_K + p_{K-1}}{sq_K + q_{K-1}}, \ell < s < \ell + 1 \right\} \quad (\ell \geq 1).$$

On a

$$\begin{aligned}
x + (-1)^K h/2 &\in \overline{\mathfrak{c}_m}, \\
x + (-1)^{K-1} h/2 &\in \overline{\mathfrak{c}_n}.
\end{aligned}$$

D'autre part, I est inclus dans la réunion des $\overline{\mathfrak{c}_\ell}$, $m \leq \ell \leq n$, donc

$$\int_I \gamma_k(t) dt \leq \sum_{n \leq \ell \leq m} \int_{\mathfrak{c}_\ell} \beta_{k-1}(t) \log(1/\alpha_k(t)) dt,$$

et d'après la majoration (20) appliquée avec $i = K$ et $j = k - K - 1$,

$$\begin{aligned}
\int_I \gamma_k(t) dt &\leq \frac{1}{F_{k-K}} \sum_{n \leq \ell \leq m} \int_{\mathfrak{c}_\ell} \frac{\log(1/\alpha_{k-K-1}(\alpha_{K+1}(t)))}{q_{K+1}(t)} dt \\
&\leq \frac{1}{q_K F_{k-K}} \sum_{n \leq \ell \leq m} \frac{1}{\ell} \int_{\mathfrak{c}_\ell} \log(1/\alpha_{k-K-1}(\alpha_{K+1}(t))) dt,
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient du fait que pour $t \in \mathfrak{c}_\ell$, $q_{K+1}(t) = \ell q_K + q_{K-1}$. Nous effectuons dans chaque $\int_{\mathfrak{c}_\ell}$ le changement de variable $w = \alpha_{K+1}(t)$. Notant que d'après (32)

$$dt = (-1)^{K+1} \frac{dw}{(q_{K+1} + wq_K)^2},$$

nous obtenons,

$$\begin{aligned}
\int_I \gamma_k(t) dt &\leq \frac{1}{q_K F_{k-K}} \sum_{m \leq \ell \leq n} \frac{1}{\ell} \int_0^1 \log(1/\alpha_{k-K-1}(w)) \frac{dw}{(q_{K+1} + wq_K)^2} \\
&\leq \frac{1}{q_K^3 F_{k-K}} \int_0^1 \log(1/\alpha_{k-K-1}(w)) dw \sum_{m \leq \ell \leq n} \frac{1}{\ell^3} \\
&\leq \frac{2}{q_K^3 F_{k-K}} \int_0^1 \log(1/\alpha_{k-K-1}(w)) \frac{dw}{1+w} \sum_{m \leq \ell \leq n} \frac{1}{\ell^3}.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4 et l'invariance de la mesure μ par α_{k-K-1} , il vient

$$\int_I \gamma_k(t) dt \leq \frac{6(n-m)}{q_K^3 F_{k-K} m^2 n} \int_0^1 \log(1/w) dw = \frac{6(n-m)}{q_K^3 F_{k-K} m^2 n}.$$

Distinguons alors deux cas.

- Premier cas : $E \geq 3$. On a donc $v - u \geq 1$, d'où

$$n - m \leq v - (u - 1) \leq 2(v - u), \quad (45)$$

et, d'après (44),

$$\begin{aligned} \int_I \gamma_k(t) dt &\leq 6 \frac{n-m}{q_K^3 F_{k-K} m^2 n} \leq 12 \frac{v-u}{q_K^3 F_{k-K} m^2 n} \\ &\leq 72 \frac{h}{q_K F_{k-K} m} \leq 72 \frac{h}{q_K F_{k-K}}. \end{aligned} \quad (46)$$

- Second cas : $E = 2$. On a donc $n = m + 1$.

Comme $I \subset \bar{\mathfrak{c}}_m \cup \bar{\mathfrak{c}}_{m+1}$, on a

$$q_{K+1}(t) = \begin{cases} mq_K + q_{K-1} \\ \text{ou} \\ (m+1)q_K + q_{K-1} \end{cases} \quad (t \in I, t \notin \partial \mathfrak{c}_m \cup \partial \mathfrak{c}_{m+1})$$

En particulier, pour $t \in I, t \notin \partial \mathfrak{c}_m \cup \partial \mathfrak{c}_{m+1}$, on a

$$\frac{q_{K+1}(t)}{q_{K+1}(x)} \geq \frac{mq_K + q_{K-1}}{(m+1)q_K + q_{K-1}} \geq \frac{1}{2}. \quad (47)$$

Par conséquent, d'après la majoration (20) et la proposition 1,

$$\int_I \gamma_k(t) dt \leq \frac{2}{q_{K+1}(x) F_{k-K}} \int_I \log(1/\alpha_k(t)) dt \leq \frac{2}{q_{K+1}(x) F_{k-K}} eh \log(1/h). \quad (48)$$

La conclusion découle de (46) et (48). \square

Proposition 11 *Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > K$ on a*

$$\int_I \gamma_k(t) dt \leq \frac{h}{F_{k-K}} \left(\frac{72[E > 2]}{q_K} + 12 \frac{[E = 2] \log q_{K+2}(x)}{q_{K+1}(x)} + 12 \frac{[E = 2] \log q_{K+3}(x)}{q_{K+2}(x)} \right).$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} \frac{\log 1/h}{q_{K+1}(x)} &\leq \frac{\log(1/2\delta_{K+1}(x))}{q_{K+1}(x)} \\ &\leq 2 \frac{\log q_{K+2}(x)}{q_{K+1}(x)} + 2 \frac{\log q_{K+3}(x)}{q_{K+2}(x)} \end{aligned}$$

d'après la proposition 4. Le résultat découle de cette inégalité et de la proposition 10. \square

8 Comportement de Ψ au voisinage d'un nombre de Cremer

Nous commençons par démontrer le point (i) du théorème 2, qui concerne tous les irrationnels, qu'ils soient de Cremer ou de Brjuno.

Proposition 12 *Soit $x \in X$. On a*

$$\Psi(x + h/2) - \Psi(x - h/2) = o(h \log 1/h) \quad (h \rightarrow 0).$$

Démonstration

Soit $x \in X$ et $K \in \mathbb{N}$. Soit $0 < h < \min(e^{-2}, 2\delta_K(x))$ de sorte que l'intervalle $I =]x - h/2, x + h/2[$ soit inclus dans la cellule de profondeur K contenant x .

Nous avons, d'après les majorations (22) et (20),

$$\int_I \Phi(t) dt \leq h \sum_{k < K} \frac{\log(q_{k+1} + 1)}{q_k} + \sum_{k \geq K} \frac{1}{q_K F_{k-K+1}} \int_I \log(\alpha_k(t)) dt,$$

avec $q_k = q_k(x)$ pour $k \leq K$. En employant la proposition 1, nous obtenons

$$\int_I \Phi(t) dt \leq 4h \log(q_K + 1) + \frac{10}{q_K} h \log(1/h).$$

Par conséquent,

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{|\Psi(x + h/2) - \Psi(x - h/2)|}{h \log(1/h)} \leq \frac{10}{q_K}.$$

Comme K est arbitraire, cela démontre le résultat. \square

Nous démontrons maintenant le point (ii) du théorème 2 lorsque x est un nombre de Cremer.

Proposition 13 *Soit x un nombre de Cremer. On a*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi(x + h) - \Psi(x)}{h} = +\infty.$$

Démonstration

Comme la fonction γ_k est positive, nous avons en toute généralité pour $h > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(x + h) - \Psi(x)}{h} &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \sum_{k \geq 0} \gamma_k(t) dt \geq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \sum_{k \leq K} \gamma_k(t) dt \\ &= \sum_{k \leq K} \frac{\int_x^{x+h} \gamma_k(t) dt}{h}. \end{aligned}$$

Si x est irrationnel, chacune des fonctions γ_k est continue au point x , ce qui entraîne

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi(x + h) - \Psi(x)}{h} \geq \sum_{k \leq K} \gamma_k(x) \quad (x \in X, K \in \mathbb{N}).$$

Si x est un point de Cremer, le membre de droite tend vers l'infini avec K , ce qui implique le résultat voulu. \square

9 Démonstration du théorème 1

Les propositions 13 et 5 impliquent que tout point de Lebesgue de Φ est nécessairement un nombre de Brjuno. Il reste donc à établir que

$$\frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} |\Phi(t) - \Phi(x)| dt \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) \quad (49)$$

quand x est un nombre de Brjuno. Par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R} , on peut supposer que les nombres $x \pm h/2$ sont irrationnels. Posons alors $I = [x - h/2, x + h/2]$ et notons $K = K(x, h)$ la profondeur de ce segment. On sait que $K(x, h)$ tend vers l'infini quand h tend vers 0 (cf. §5.4).

Nous avons

$$\begin{aligned} \int_I |\Phi(t) - \Phi(x)| dt &\leq \sum_{k < K} \int_I |\gamma_k(t) - \gamma_k(x)| dt + \int_I \gamma_K(t) dt \\ &\quad + \sum_{k > K} \int_I \gamma_k(t) dt + h \sum_{k \geq K} \gamma_k(x). \end{aligned}$$

Majorons chacun des quatre termes du second membre. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \sum_{k < K} \int_I |\gamma_k(t) - \gamma_k(x)| dt &\leq \frac{3h}{4} \sum_{k < K} q_{k+1} \quad (\text{d'après la proposition 7}) \\ &\leq 3q_K h \quad (\text{d'après (13)}) \\ &\leq \frac{6}{q_{K+1}} \quad (\text{d'après la proposition 3 puisque } h/2 < \delta_K(x)), \end{aligned}$$

en notant désormais $q_j = q_j(x)$ pour tout j ; puis,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_I \gamma_K(t) dt &\leq 16\gamma_K(x) + \frac{6 \log q_K + 6}{q_K} \quad (\text{d'après la proposition 9}) \\ &\leq \frac{22 \log q_{K+1} + 6}{q_K} \quad (\text{d'après (22)}), \end{aligned}$$

pourvu que $K \geq 1$; ensuite,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \sum_{k > K} \int_I \gamma_k(t) dt &\leq \left(\frac{72}{q_K} + 12 \frac{\log q_{K+2}}{q_{K+1}} + 12 \frac{\log q_{K+3}}{q_{K+2}} \right) \sum_{k > K} \frac{1}{F_{k-K}} \quad (\text{d'après la proposition 11}) \\ &\leq \frac{242}{q_K} + 41 \frac{\log q_{K+2}}{q_{K+1}} + 41 \frac{\log q_{K+3}}{q_{K+2}}; \end{aligned}$$

et enfin

$$\sum_{k \geq K} \gamma_k(x) \leq \sum_{k \geq K} \frac{\log q_{k+1}}{q_k} \quad (\text{d'après (22)}).$$

Finalement, on obtient

$$\frac{1}{h} \int_I |\Phi(t) - \Phi(x)| dt \leq \sum_{k \geq K} \frac{42 \log q_{k+1} + 248}{q_k} \quad (50)$$

Puisque x est un nombre de Brjuno, le membre de droite de (50) tend vers 0 lorsque K tend vers l'infini et donc lorsque h tend vers 0, ce qui achève la preuve.

10 Démonstration du théorème 3

Le lemme 2 du §6 prouve que

$$\omega(h) \geq h \log 1/h + O(h).$$

Il reste donc à établir

$$\omega(h) \leq h \log 1/h + O(h). \quad (51)$$

Lorsque $h > e^{-2}$, il s'agit de montrer que $\omega(h) = O(1)$, ce qui est vrai car $\Phi \in L^1(0, 1)$. Il suffit donc de montrer que si I est un segment de longueur $h \leq e^{-2}$ inclus dans $[0, 1]$ on a

$$\int_I \Phi(t) dt \leq h \log(1/h) + O(h). \quad (52)$$

En fait, par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R} , on peut également supposer que les extrémités et le milieu x de I sont irrationnels. Soit alors K la profondeur de I et E son épaisseur.

Notons $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}(a_1, \dots, a_K)$ la cellule de profondeur K qui contient I et, pour $j \leq K$, désignons par p_j et q_j les valeurs constantes de ces fonctions dans \mathfrak{c} . Comme I n'est pas inclus dans une cellule de profondeur $K + 1$, il existe $a_{K+1} \geq 2$ tel que le nombre rationnel

$$r = [0; a_1, \dots, a_K, a_{K+1}] = \frac{p}{q} \quad ((p, q) = 1)$$

appartienne à I . Observons que p et q sont les valeurs respectives des fonctions p_{K+1} et q_{K+1} dans la cellule $\mathfrak{c}(a_1, \dots, a_K, a_{K+1})$. D'autre part, si $E = 2$, le nombre x se situe soit dans la cellule $\mathfrak{c}(a_1, \dots, a_K, a_{K+1})$, soit dans la cellule $\mathfrak{c}(a_1, \dots, a_K, a_{K+1} - 1)$. Par conséquent

$$q_{K+1}(x) = q \quad \text{ou} \quad q - q_K \geq q/2. \quad (53)$$

Nous distinguons alors deux cas.

Premier cas : $q \leq 100$.

Écrivons $I = [r - \alpha h, r + \beta h]$ avec $0 < \alpha, \beta < 1$ et $\alpha + \beta = 1$. D'après la proposition 5, on a alors

$$\begin{aligned} \int_I \Phi(t) dt &= (\Psi(r + \beta h) - \Psi(r)) + (\Psi(r) - \Psi(r - \alpha h)) \\ &= \frac{\beta h}{q} \log(1/\beta h) + \frac{\alpha h}{q} \log(1/\alpha h) + O(h \log 2q) \\ &= \frac{h \log 1/h}{q} + \frac{h}{q} (\alpha \log 1/\alpha + \beta \log 1/\beta) + O(h) \\ &\leq h \log 1/h + O(h), \end{aligned}$$

car la fonction $t \mapsto t \log(1/t)$ est bornée sur l'intervalle $[0, 1]$.

Deuxième cas : $q > 100$.

En notant m le plus grand entier inférieur ou égal à K tel que $q_m \leq 100$, nous effectuons la décomposition

$$\int_I \Phi(t) dt = \sum_{k < m} \int_I \gamma_k(t) dt + \int_I \gamma_m(t) dt + \sum_{k > m} \int_I \gamma_k(t) dt.$$

Nous avons, d'après (22),

$$\sum_{k < m} \int_I \gamma_k(t) dt \leq h \sum_{k < m} \frac{\log(q_{k+1} + 1)}{q_k} \leq h \log(q_m + 1) \sum_{k \geq 1} \frac{1}{F_k} \leq 3,36h \log 101,$$

et donc

$$\int_I \Phi(t) dt \leq \int_I \gamma_m(t) dt + \sum_{k > m} \int_I \gamma_k(t) dt + O(h).$$

Il reste à établir la majoration

$$\int_I \gamma_m(t) dt + \sum_{k > m} \int_I \gamma_k(t) dt \leq h \log 1/h + O(h). \quad (54)$$

Pour ce faire, nous distinguons deux sous-cas.

Premier sous-cas : $m < K$.

La fonction q_{m+1} est alors constante sur I et, par maximalité de m , on a $q_{m+1} > 100$. Nous avons alors directement avec (20) et la proposition 1

$$\begin{aligned} \sum_{k > m} \int_I \gamma_k(t) dt &\leq \frac{1}{q_{m+1}} \sum_{k > m} \frac{1}{F_{k-m}} \int_I \log(1/\alpha_k(t)) dt \\ &\leq \frac{3,36eh \log(1/h)}{100} \leq \frac{h}{4} \log 1/h. \end{aligned}$$

Par ailleurs la proposition 6 nous donne

$$\int_I \gamma_m(t) dt \leq \frac{h \log 1/h}{2} + h.$$

On obtient donc

$$\int_I \Phi(t) dt \leq \frac{3}{4} h \log 1/h + O(h).$$

Deuxième sous-cas : $m = K$.

Nous appliquons alors les propositions 8 et 10 :

$$\begin{aligned} &\int_I \gamma_K(t) dt + \sum_{k > K} \int_I \gamma_k(t) dt \leq \\ &\leq h \log 1/h \left(\frac{[E > 2] + [E = 2]/2}{q_K} + \frac{6[E = 2]}{q_{K+1}(x)} \sum_{k > K} \frac{1}{F_{k-K}} \right) + h \left(\frac{1}{q_K} + \frac{72[E > 2]}{q_K} \sum_{k > K} \frac{1}{F_{k-K}} \right) \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{[E > 2] + [E = 2]/2}{q_K} + \frac{6[E = 2]}{q_{K+1}(x)} \sum_{k>K} \frac{1}{F_{k-K}} \leq [E > 2] + [E = 2] \left(\frac{1}{2} + \frac{12}{q} 3, 36 \right) \quad (\text{d'après (53)})$$
$$\leq 1 \quad (\text{car } q > 100),$$

nous avons bien établi (52) dans tous les cas. \square

11 Une question

Il serait intéressant de déterminer le comportement asymptotique du module de continuité L^1 de la fonction de Brjuno,

$$\omega_1(h) = \int_0^1 |\Phi(t+h) - \Phi(t)| dt$$

(où Φ est prolongée par 1-périodicité sur \mathbb{R}), quand h tend vers 0.

Références

- [1] K. DAJANI & C. KRAAIKAMP – *Ergodic theory of numbers*, Carus Mathematical Monographs, vol. 29, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2002.
- [2] A. M. D'YACHKOV – « Description of sets of Lebesgue points and summability points of a Fourier series », *Mat. Sb.* **182** (1991), no. 9, p. 1367–1374.
- [3] A. Y. KHINCHIN – *Continued fractions*, russian éd., Dover Publications Inc., Mineola, NY, 1997, With a preface by B. V. Gnedenko, Reprint of the 1964 translation.
- [4] R. O. KUZMIN – « Sur un problème de Gauss », *Atti Congr. Intern. Bologna* **6** (1928), p. 83–89.
- [5] S. MARMI, P. MOUSSA & J.-C. YOCCOZ – « The Brjuno functions and their regularity properties », *Comm. Math. Phys.* **186** (1997), no. 2, p. 265–293.
- [6] M. MENDÈS FRANCE – « Remarks and problems on finite and periodic continued fractions », *Enseign. Math. (2)* **39** (1993), no. 3-4, p. 249–257.
- [7] I. NIVEN, H. S. ZUCKERMAN & H. L. MONTGOMERY – *An introduction to the theory of numbers*, fifth éd., John Wiley & Sons Inc., New York, 1991.
- [8] J.-C. YOCCOZ – « Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques », *Astérisque* (1995), no. 231, p. 3–88, Petits diviseurs en dimension 1.

BALAZARD, Michel
Laboratoire Jean-Victor Poncelet, UMR 2615
CNRS, Université Indépendante de Moscou
Bolshoy Vlassievski pereulok, dom 11
119002 Moscou
RUSSIE
Adresse électronique : balazard@poncelet.ru

MARTIN, Bruno
Institut für Mathematik A
TU Graz
Steyergasse 30/II
8010 Graz
AUTRICHE
Adresse électronique : martin@finanz.math.tugraz.at